

標準周波数源となる附加質量音片について

近 野 正 猪 俣 敬 作

工学部 電気工学科

§ 1 緒 言

従来我々の研究して来た音片振動子は、写真電送、模写電信等の独立同期用の周波数源、及び高安定度の標準周波数源として使用され優秀な成績を収めて来た。而してその希望周波数も $50 \text{ (c/s)} - 10,000 \text{ (c/s)}$ の広範囲に亘る様になり、そのため特殊な変形音片に関する研究も必要になつて来た。従来使用されて来た自由-自由棒の音片振動子（以下これを素地音片と呼ぶ）ではその固有周波数は厚さに比例し長さの二乗に逆比例するから、低い固有周波数を得るには、音片を長くするか、或は薄くする必要がある。音片の厚さが薄くなると共に共振尖鋭度 Q も低下し周波数の安定度も低下する缺点がある。又使用条件等によつて音片の長さ制限のある場合には従来均一な素地音片では之に適合させることが出来ない場合がある。此れが解決策として研究されたのが以下に述べる「附加質量音片」である。即ち、自由-自由棒の任意点に質量を附加することに依り、その固有周波数が低減する性質を利用したもので、素地音片の寸法及び附加質量の大きさとその取付位置を与へれば、固有周波数、節点位置、振動姿態等が理論的に決定出来、それらの値が実験値とよく一致するから、その設計が可能であり種々の点から低い周波数範囲に於ける標準振動子として優れた性質を有することが明らかとなつた。附加質量音片はその附加質量の取付位置により次の如く分類される。

(1) 両端附加質量音片

素地音片の両端に等質量を附加したもので附加質量の増大と共に基本振動の節点の位置は素地音片の基本振動の節点位置 ($0.224 l$, 及び $0.776 l$, l は素地音片の全長) より夫々端部方向に移動し、附加質量が無限大になると両端支持棒の場合と等価となる。

(2) 中央附加質量音片

素地音片の中央部に質量を附加したもので、附加質量の増加と共にその基本振動の節点の位置は素地音片の基本振動の節点位置より夫々中央に向つて移動し、又共振周波数も低下し、附加質量が無限大の場合は両端自由-中央部支持棒に等価となる。

文 献

- (1) 鈴木辰男；東北大火曜談話会 昭和24. 10；電通誌, 昭26. 12.
- (2) D. Young. J. App. Mecha. 1948. March, vol. 15, No. 1,
- (3) 早坂・横田；電試彙 vol. 5, 昭16.
- (4) 永井・木村；聯大予 昭27. 5.
- (5) 永井・近野・猪俣；聯大予 昭27. 5

（3） 三点平衡附加質量音片

両端及び中央の三点に質量を附加した三点附加質量音片に於て、中央附加質量を両端附加質量の 3.34 倍に選ぶと、節点の位置が附加した質量値に無関係に常に素地音片の節点の位置に来る。斯る音片を三点平衡附加質量音片と呼ぶ。一方、中央附加質量と両端附加質量との間に上記の関係のない一般の三点附加質量音片では、その節点位置は両者の比の値に依り異つた値となる。

後述する如く、この三点附加質量音片は、種々なる特長を示すことが明かとなつた。猶上記の平衡音片は信大木村助教授の提案になるものである。⁽⁴⁾

以下各章に亘つて、附加質量音片の基本振動に於ける固有周波数、節点位置、その他につき説明する。

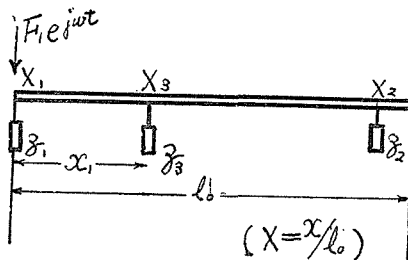
§ 2 附加質量音片の理論的解析

振動の微分方程式に境界条件を入れて解く方法もあるが複雑となるので、“重疊の”理に依る方法を示す。

本方法は東北大学助教授鈴木辰男氏⁽¹⁾ 及び D. Young氏⁽²⁾ に依り夫々独立に発表されている。又附加質量音片は Rayleigh の近以法に依り比較的容易に解析⁽⁴⁾ することも出来るが本文では省略した。

2.1. 任意インピーダンスを附加された音片振動子⁽¹⁾

先ず一般的な場合として第2.1図に示す如き、音片の任意3点 X_1, X_2, X_3 に任意の機械インピーダンス Z_1, Z_2, Z_3 を附加し任意点 X_1 から $F_1 e^{j\omega t}$ なる周期力にて駆動した場合を考へる。但し $X = \frac{x}{l_0}$ で、 l_0 は素地音片の全長を示し、 x は第2.1図に示した如く素地音片の一端からの距離である。



第2.1図

音片の任意点 X に於ける速度分布を $U(x)$ とする。今負荷インピーダンス Z_1, Z_2, Z_3 の代りに X_1 点、 X_2 点、 X_3 点に夫々 $-Z_1 \cdot v(X_1)$ 、 $-Z_2 \cdot v(X_2)$ 、 $-Z_3 \cdot v(X_3)$ なる力を加えて考へても前と変らないから、 F_1 、 $-Z_1 \cdot v(X_1)$ 、 $-Z_2 \cdot v(X_2)$ 、 $-Z_3 \cdot v(X_3)$ なる力を加えた場合の速度を重疊したものが、実際の速度に相当する。

即ち速度分布 $v(X)$ は、

$$v(X) = \frac{F_1}{Z_{X_1 X}} - \frac{Z_1}{Z_{X_1 X}} v(X_1) - \frac{Z_2}{Z_{X_2 X}} v(X_2) - \frac{Z_3}{Z_{X_3 X}} v(X_3) \dots \dots \dots (2.1)$$

となる。但し $Z_{X_m X_n}$ は X_m 点と X_n 点との相互機械インピーダンスである。

今 (2.1) 式で $X=X_1$ 、 $X=X_2$ 、 $X=X_3$ とおき $v(X_1)$ 、 $v(X_2)$ 、 $v(X_3)$ を求めること、

$$V(X_1) = \frac{F_1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{1}{Z_{X_1 X_1}} & \frac{Z_2}{Z_{X_2 X_1}} & \frac{Z_3}{Z_{X_3 X_1}} \\ \frac{1}{Z_{X_1 X_2}} & 1 + \frac{Z_2}{Z_{X_2 X_2}} & \frac{Z_3}{Z_{X_3 X_2}} \\ \frac{1}{Z_{X_1 X_3}} & \frac{Z_2}{Z_{X_2 X_3}} & 1 + \frac{Z_3}{Z_{X_3 X_3}} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$V(X_2) = \frac{F_1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{Z_3}{Z_{X_2X_1}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_2}}, \frac{1}{Z_{X_1X_2}}, \frac{Z_3}{Z_{X_2X_2}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_3}}, \frac{1}{Z_{X_1X_3}}, 1 + \frac{Z_3}{Z_{X_2X_3}} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2.3)$$

$$V(X_3) = \frac{F_1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{Z_2}{Z_{X_1X_2}}, \frac{1}{Z_{X_1X_3}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_2}}, 1 + \frac{Z_2}{Z_{X_2X_2}}, \frac{1}{Z_{X_1X_2}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_3}}, \frac{Z_2}{Z_{X_2X_3}}, \frac{1}{Z_{X_1X_3}} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2.4)$$

となる。

但し

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{Z_2}{Z_{X_1X_2}}, \frac{Z_3}{Z_{X_1X_3}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_2}}, 1 + \frac{Z_2}{Z_{X_2X_2}}, \frac{Z_3}{Z_{X_2X_3}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_3}}, \frac{Z_2}{Z_{X_2X_3}}, 1 + \frac{Z_3}{Z_{X_3X_3}} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2.5)$$

である。

之等の値を (2.1) 式に代入すると、

$$V(X) = \frac{\Delta}{Z_{X_1X}} - \frac{Z_2}{Z_{X_2X}} \cdot \frac{F_1}{\Delta} \cdot v(X_2) - \frac{Z_3}{Z_{X_3X}} \cdot \frac{F_1}{\Delta} \cdot v(X_3) - \frac{Z_1}{Z_{X_1X}} \cdot \frac{F_1}{\Delta} \cdot v(X_1)$$

$$\therefore v(X) = \frac{F_1}{\Delta} \cdot U_{(X)} \dots\dots\dots (2.6)$$

を得る

但し

$$U_{(X)} = \frac{\Delta}{Z_{X_1X}} - \frac{Z_2}{Z_{X_2X}} \cdot v(X_2) - \frac{Z_3}{Z_{X_3X}} \cdot v(X_3) - \frac{Z_1}{Z_{X_1X}} \cdot v(X_1) \dots\dots\dots (2.7)$$

である。又素地音片の質量を M_0 とし第 N 様式基準角周波数を ω_N 、第 N 様式基準振動に於ける X_m, X_n 点間の相互等価質量係数を σ_{NXmXn} とすれば X_m, X_n 点間の機械インピーダンスは⁽³⁾

$$\frac{1}{Z_{XmXn}} = \frac{j\omega}{M_0} \left\{ \frac{1}{\omega^2 \sigma_{0XmXn}} + \sum_n \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2) \sigma_{NXmXn}} \right\} \dots\dots\dots (2.7 A)$$

にて与えられる。

共振角周波数は (2.6) 式の名分を零とおき、即ち $\Delta=0$ を満足する角周波数で与えられる。又節点の位置は速度分布 $v(X)=0$ なる位置であるから、(2.6) 式に於て分子を零とおき即ち、 $U(X)=0$ を満足する $X(=x/l_0)$ で与えられる。

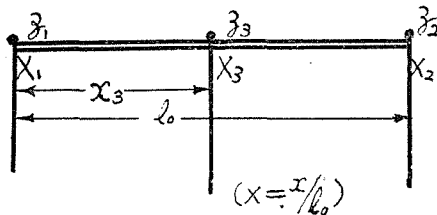
2.2. 三点附加質量音片の共振周波数

第2.1図の附加インピーダンスが質量なる場合即ち、第2.2図の如き三点附加質量音片に於いて

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z_2 = j\omega M_1 = j\omega M_2 \\ Z_3 &= j\omega M_3, X_1=0, X_2=1, X_3=1/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

とおき両端及び中央部に質量を附加した場合につき考察する。

第2.2図



α_n を基準定数とすれば素地音片の共振角周波数 ω_{0N} は次式で表はされる。

即ち

$$\omega_{0N} = \frac{\alpha_N^2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{d}{l_0^3} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \dots\dots (2.9)$$

但し l_0, d, ρ, E は夫々素地音片の長さ (cm), 厚さ (cm), 密度 (g/cm³), ヤング率 (dyne/cm²) である。(2.7 A), (2.8) 式の諸条件を

(2.5) 式に代入して $\Delta=0$ なる条件より共振角周波数 ω_1 を算出すると

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12.3pq^2 + 1.46p + 8q + 29.4pq + 48q^2}{1 + 8q + p + 6pq + 12q^2}}} \dots\dots (2.10)$$

を得る。但し

ω_{01} ; 素地音片の第一次共振角周波数 ((2.9) 式参照)。

ω_1 ; 中央附加質量比 p , 両端附加質量比 q なる附加質量音片の第一次共振角周波数。

p ; 中央附加質量 M_3 と素地音片の質量 M_0 との比 ($=M_3/M_0$)。

q ; 両端附加質量 $M_1=M_2$ と素地音片 M_0 との比 ($=M_1/M_0=M_2/M_0$) であり, 第二次以上 ($N>3$) の高次振動は省略して計算を行つた。

2.3. 両端附加質量音片の共振周波数。

第2.3図に示す如き素地音片の両端に質量を附加した両端附加質量音片の共振角周波数 ω_1 は (2.10) 式に於て中央附加質量比 $p=0$ とおく事に依り求められる。

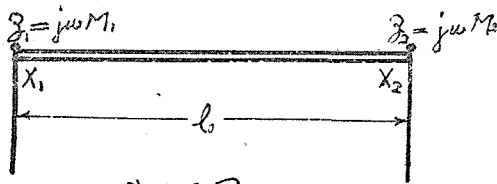
即ち

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8q}{1 + 2q}}} \dots\dots (2.11)$$

を得る。この理論値と実験値を第2.1表及び第2.4図に示す

第 2.1 表

両端附加質量 $M_1=M_2(\text{gr})$	両端附加質量比 $q=M_1/M_0$	両端附加質量音片の基本振動の周波数 f_1	実験値 f_1/f_{01}	理論値 f_1/f_{01}	誤差 %
0	0.000	157	1	1	0.000
3	0.097	126	0.805	0.776	-0.29
4.2	0.136	112	0.710	0.730	+0.20
8.2	0.266	101	0.640	0.645	+0.50
10.6	0.343	97	0.620	0.618	-0.2
15.7	0.505	91	0.580	0.578	+0.2
18.8	0.610	89	0.560	0.558	+0.2
26.3	0.850	85	0.540	0.535	+0.5
40.1	1.300	78	0.500	0.507	+0.7



第2.3図

同表及び同図より、理論値と実験値とが誤差の範囲内で一致していることがわかる。

2.4. 中央附加質量音片の共振周波数

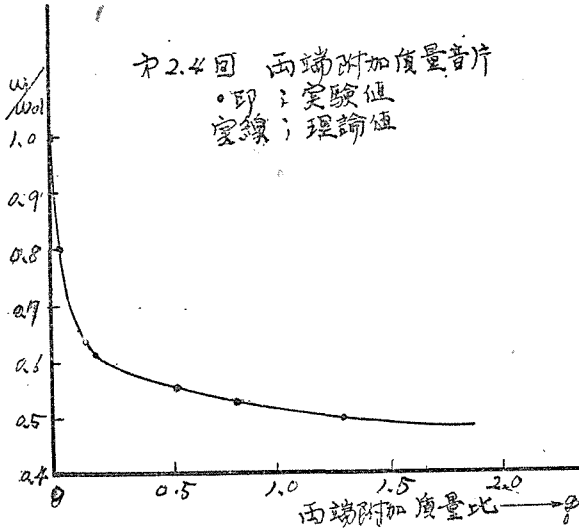
第2.5図に示す如く素地音片の中央部にみに質量を附加した中央附加質量音片の第一次共振角周波数 ω_1 は(2.10)式に於て、両端附加質量比 $q=0$ とおけば求める事が出来る。

即ち、

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1.46p}{1+p}}} \quad (2.12)$$

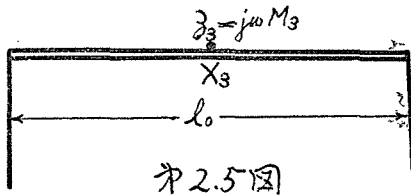
で表はされる。

この理論値と実験値とを第2.2表表及び第2.6図に示す。同表及び同図より理論値と実験値とが、誤差範囲内で一致していることが解る。



第 2. 2 表

中央附加質量 M_3 (gr)	素地音片質量 M_0 (gr)	中央附加質量比 $p=M_3/M_0$	第一次共振周波数 f_1 (c/s)	実験値 f_1/f_{01}	理論値 f_1/f_{01}	誤 差 %
0	30.8	0	160	1.0	1.0	0.00
3	30.8	0.097	152	0.94	0.943	+0.3
8.2	30.8	0.266	140	0.87	0.877	+0.7
15.7	30.8	0.505	130	0.81	0.819	+0.9
26.3	30.8	0.85	122	0.76	0.775	+0.9
0	36.3	0	571	1.0	1.0	0.00
28.5	36.3	0.784	444	0.78	0.781	+0.1
41.9	36.3	1.154	426.6	0.745	0.750	+0.5
100.0	36.3	2.750	394	0.690	0.694	+0.4
147.0	36.3	4.050	385	0.675	0.680	+0.5



数 ω_1 は (2.10) 式に於て

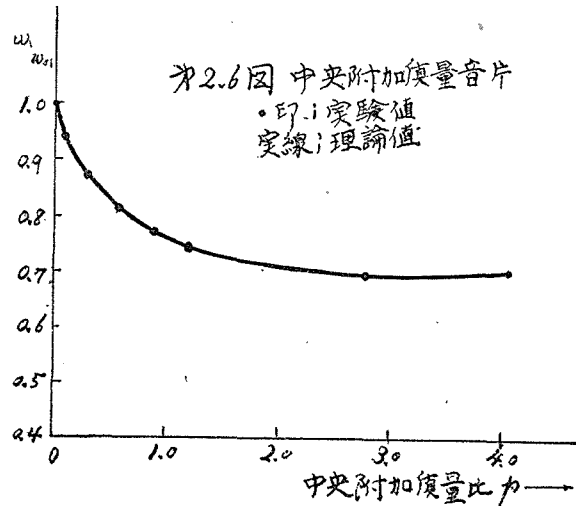
$p = 3.34q$ を代入すると

$$\frac{\omega_1}{\omega_{01}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3.86p}} \quad (2.13)$$

となる。この理論値と実測値を第 2.3 表 及び第 2.7 図に示す

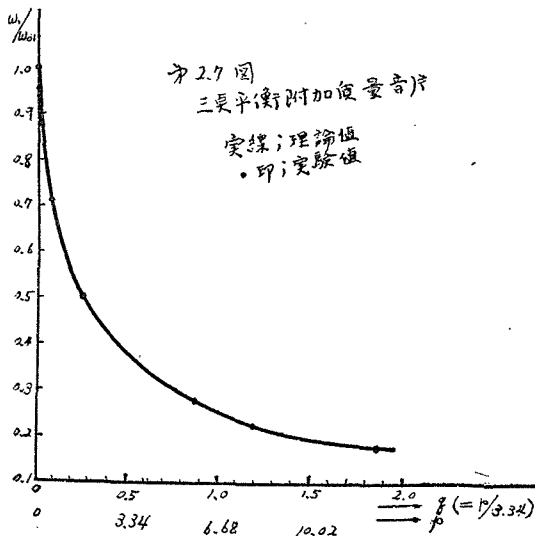
2.5. 三点平衡附加質量音片の共振周波数。

(2.10) 式即ち三点附加質量音片の共振角周波数の式に於て、中央部附加質量 M_3 と両端附加質量 $M_1 (=M_2)$ との間に $M_3 = 3.34M_1$ (係数 3.34 に就ては § 3 参照) なる関係を与へた場合が三点平衡附加質量音片である。即ちその第一次共振角周波



第 2.3 表

両端質量比 $q = M_1/M_0$	中央質量比 $p = M_3/M_0$	実験値 ω_1/ω_{01}	理論値 f_1/f_{01}	誤差 %
0.879	2.744	0.290	0.2937	+0.3
1.209	4.039	0.240	0.2454	+0.5
1.866	6.233	0.193	0.1959	+0.2



この場合に於ても理論値と実験値が良く一致して居り周波数の降下率も前述の両端附加質量音片及び中央附加質量音片に比して大きい事が認められる。従つて共振周波数を下げる目的に対してはこの三点平衡附加質量音片が適している。

第 2.4 表及び第 2.8 図に三点平衡附加質量音片の設計図表を示す。同図表に於ける短縮率は、次の如く定義されたものである。

素地音片と同一材質、同一厚さを有し、附加質量音片と同一振動数を有する音片を仮定しその長さを 1 と

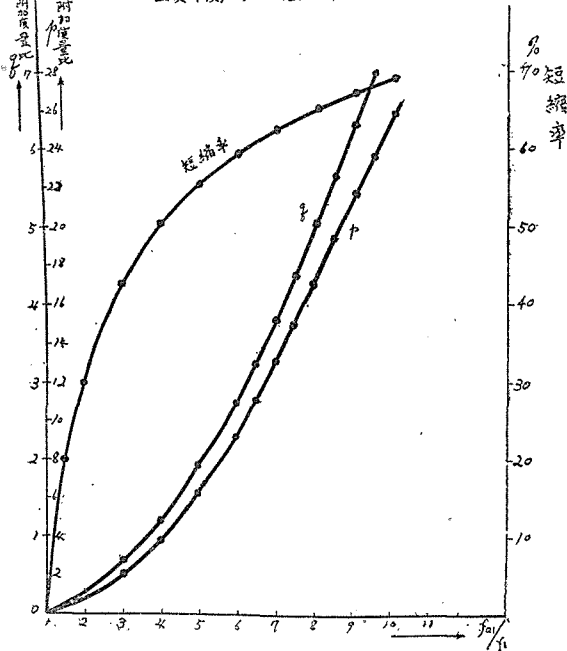
し、又素地音片の長さを l_0 とした場合 $(1-l_0)/l_0 \cdot 100\%$ を以つて附加質量音片の短縮率と定義する

第 2.4 表

f_{01}/f_1	f_1/f_{01}	中央附加質量比 $p = M_3/M_0$	両端附加質量比 $q = M_1/M_0 = M_2/M_0$	短縮率 %
1.0	1	0.0	0.0	0.0
1.2	0.834	0.114	0.034	8.7
1.4	0.715	0.248	0.074	15.5
1.6	0.625	0.405	0.120	20.9
1.8	0.556	0.580	0.173	25.4
2.0	0.50	0.780	0.233	29.3
2.2	0.455	0.995	0.297	32.5
2.4	0.417	1.240	0.370	34.7
2.6	0.385	1.480	0.440	37.7
2.8	0.358	1.770	0.530	40.0
3.0	0.334	2.060	0.610	42.3
3.2	0.312	2.40	0.716	44.0
3.4	0.294	2.730	0.820	45.8
3.6	0.278	3.100	0.925	47.3
3.8	0.263	3.50	1.040	48.7
4.0	0.250	3.90	1.160	50.0
4.2	0.238	4.30	1.280	51.2
4.4	0.227	4.740	1.420	52.4
4.6	0.218	5.200	1.550	53.4
4.8	0.208	5.700	1.700	54.4
5.0	0.200	6.20	1.85	55.3
5.5	0.182	7.60	2.26	57.3
6.0	0.167	9.00	2.68	59.1
6.5	0.154	10.70	3.20	60.8
7.0	0.143	12.40	3.70	62.2
7.5	0.133	14.30	4.29	63.5
8.0	0.125	16.30	4.80	64.6
8.5	0.118	18.50	5.50	65.6
9.0	0.111	20.70	6.20	66.7
9.5	0.105	23.10	6.90	67.9
10.0	0.100	25.60	7.68	68.4
20.0	0.050	104.0	31.10	77.6

第2.8図

三点平衡附加質量音片設計図表



後述するごとく、第2.1図乃至第2.3図或は(2.11)式乃至(2.13)式を用ひて、容易に附加質量音片を設計することが出来その設計値も実験値とよく一致する事が明瞭となつた。

§ 3. 附加質量音片の理論的解析(続)

前章に於ては、主として附加質量音片の共振周波数につき述べたが、本章では附加質量音片の節点に就いて説明する。

3. 1. 三点附加質量音片の節点について

任意の等質量を両端に附加し、他の任意質量を中央に附加した。三点附加質量音片の節点は理論的に求めることが出来る。即ち § 2 に述べた如く、振動姿態を表

す(2.6)式の $U(X)$ を零ならしめる X の値が求める節点の位置である。

$$\text{即ち} \quad v(X) = \frac{F_1}{\Delta} \cdot U(X) \dots\dots\dots (2.6)$$

に於て

$$U(X) = \frac{\Delta}{Z_{X_1X}} - \frac{Z_2}{Z_{X_2X}} \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{Z_3}{Z_{X_1X_3}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_2}}, \frac{1}{Z_{X_1X_2}}, \frac{Z_3}{Z_{X_2X_3}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_3}}, \frac{1}{Z_{X_1X_3}}, 1 + \frac{Z_3}{Z_{X_2X_3}} \end{vmatrix} - \frac{Z_3}{Z_{X_3X}} \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{Z_2}{Z_{X_1X_2}}, \frac{1}{Z_{X_1X_1}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_2}}, 1 + \frac{Z_2}{Z_{X_2X_2}}, \frac{1}{Z_{X_1X_2}} \\ \frac{Z_1}{Z_{X_1X_3}}, \frac{Z_2}{Z_{X_2X_3}}, \frac{1}{Z_{X_1X_3}} \end{vmatrix} - \frac{Z_1}{Z_{X_1X}} \begin{vmatrix} \frac{1}{Z_{X_1X_1}}, \frac{Z_2}{Z_{X_1X_2}}, \frac{Z_3}{Z_{X_1X_3}} \\ \frac{1}{Z_{X_1X_2}}, 1 + \frac{Z_2}{Z_{X_2X_2}}, \frac{Z_3}{Z_{X_2X_3}} \\ \frac{1}{Z_{X_1X_3}}, \frac{Z_2}{Z_{X_2X_3}}, 1 + \frac{Z_3}{Z_{X_2X_3}} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (3.1)$$

とおき、之に $X_1=0, X_2=1/2, X_3=1, Z_1=j\omega M_1=Z_2=j\omega M_2, Z_3=j\omega M_3,$

$\frac{1}{Z_{X_mX_n}} = \frac{j\omega}{M_0} \left\{ \frac{1}{-\omega\sigma_0 X_m X_n} + \sum_n \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)\sigma_n X_m X_n} \right\}$ を代入し、第2次振動以上($N>2$)を省略して上式を整理すると(3.2)式を得る。

即ち

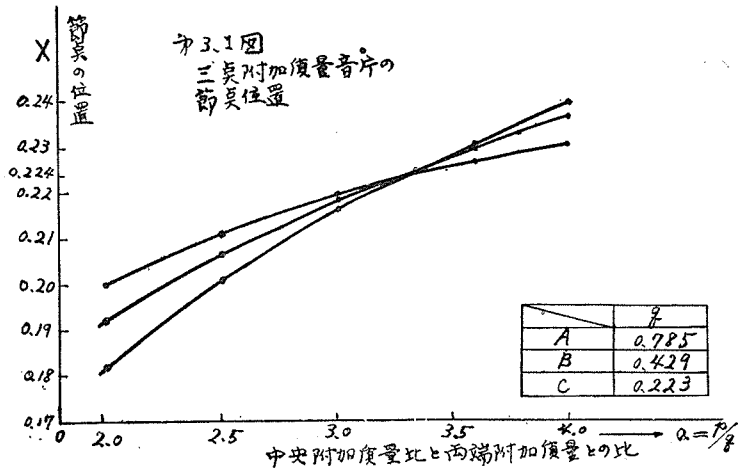
$$z_1 \left[\left(\frac{1}{\sigma_1 X_2 X_n} + \frac{1}{\sigma_1 X_1 X_n} \right) \Delta_1 + \frac{1}{\sigma_1 X_1 X_n} \Delta_3 \right] - \left[\frac{1}{\sigma_0 X_2 X_n} + \frac{1}{\sigma_0 X_1 X_n} \Delta_1 + \Delta_3 \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

但し

$$\begin{aligned} \sigma_1 X_2 X_n &= \frac{(\sin \alpha_1 - \sinh \alpha_1)^2}{U_1(X_2=1) U_1(X_n)}, \quad \sigma_1 X_1 X_n = \frac{(\sin \alpha_1 - \sinh \alpha_1)^2}{U_1(X_1=0) U_1(X_n)}, \\ \sigma_0 X_2 X_n &= \frac{1}{6X_n - 2}, \quad \sigma_0 X_1 X_n = \frac{1}{4 - 6X_n}, \\ U_1(X_n) &= \frac{-\cos \varepsilon_1/2 - \sin \varepsilon_1/2}{\tan \varepsilon_1} \left\{ -\sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha_1 X_n - \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1/2 \right) + \sin \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot e^{\alpha_1 X_n} \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot e^{-\alpha_1 X_n} \right\} \\ \Delta_1 &= [-(4+5.87p)z - (2+3p)]q, \\ q &= M_1/M_0 = \frac{M_2}{M_0}, \quad p = M_3/M_0, \quad \alpha_1 = 4.7300, \quad \varepsilon_1 = 0.176518 \times 10^{-1}, \\ z_1 &= \frac{1+8q+p+6pq+12q^2}{123.3pq^2+1.46p+8q+29.4pq+48q^2}, \quad \dots\dots\dots (3.3) \end{aligned}$$

である。

茲に $p=aq$ とおき節点位置 X_n を算出すれば第3.1表及び第3.1図を得る。



第 3.1 表 三点附加質量音片の節点位置

X a=(p/q)	q=0.785		q=0.429		q=0.223	
	実験値 X	理論値 X	実験値 X	理論値 X	実験値 X	理論値 X
2.0	0.182	0.183	0.193	0.192	0.200	0.200
2.5	0.202	0.203	0.206	0.203	0.210	0.211
3.0	0.216	0.217	0.218	0.219	0.220	0.218
3.34	0.224	0.225	0.224	0.224	0.224	0.224
3.5	0.226	0.228	0.227	0.226	0.228	0.226
4.0	0.238	0.238	0.237	0.236	0.230	0.230

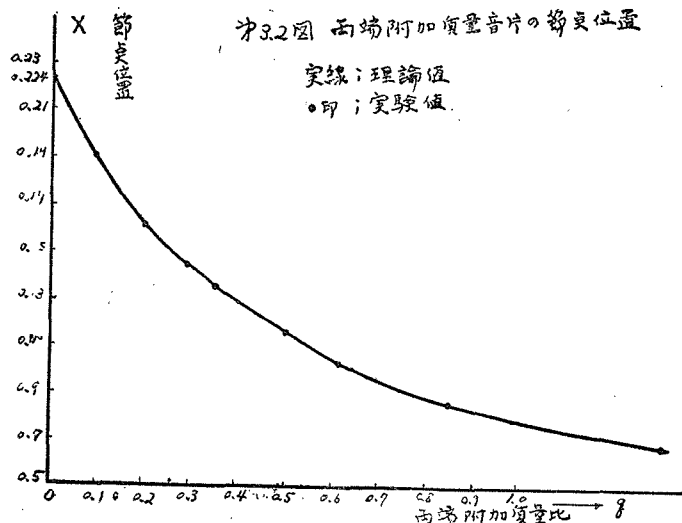
同図表に見られる如く、理論値と実験値とはよく一致して居り、 p と q との比の値 a が 3.34—一定であれば、 p 及び q の値如何に拘らず、節点の位置が一定不変である。而も $0.224 \times l_0$ なる素地音片の基本振動の節点と同じ位置にあることがわかる。

換言すれば、附加質量の比 $p/q=a$ を適当に選定することにより、その節点位置を任意点に持ち来らすことが出来る、特別な場合として素地音片の節点と同じ位置 ($0.224 l_0$ 及び $0.776 l_0$) にも位置せしめることが出来る。

3.2. 両端附加質量音片の節点

(3.2) 式に於て、中央附加質量比 $p=0$ とおけば両端附加質量音片の節点が得られる。

その理論値及び実験値を第3.2表及第3.2図に示す



第 3.2 表 両端附加質量音片の節点位置

$q=M_3/M_0$	端より節点迄の距離 x_0 (cm)	$x_0/l_0=X$ (実験値)	理論値	誤差%
0	5.0	0.224	0.224	0
0.097	4.15	0.189	0.188	-0.1
0.194	3.60	0.163	0.164	+0.1
0.284	3.20	0.145	0.146	+0.1
0.344	3.00	0.136	0.135	-0.1
0.505	2.50	0.114	0.113	-0.1
0.610	2.30	0.104	0.103	-0.1
0.850	2.10	0.085	0.084	-0.1
1.300	1.50	0.068	0.064	-0.1

同図表からわかる如く理論値と実験値とが非常によく一致している。

3.3 中央附加質量音片の節点

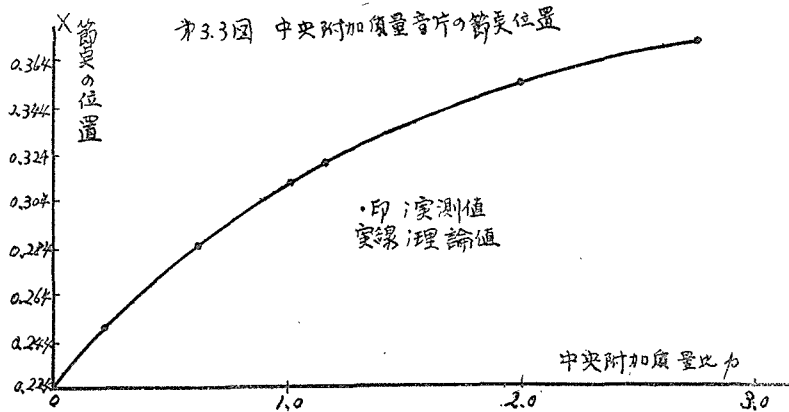
(3.2) 式に於て両端附加質量比 $q=0$ とおけば求める中央附加質量音片の節点が得られ

る。

之の理論値と実験値とを第3.3表及び第3.3図に示す。この場合にも理論値と実測値とがよく一致している事が認められる。

第 3.3 表 中央附加質量音片の節点位置

中央附加質量 $p=M_3/M_0$	端より節点迄の 距離 x_p (cm)	実 験 値 $X=x_p/l_0$	理 論 値 X	誤 差 %
0.2	3.78	0.252	0.251	-0.1
0.6	4.25	0.284	0.284	0.0
1.0	4.68	0.312	0.313	+0.1
1.154	4.80	0.320	0.321	+0.1
2.00	5.31	0.354	0.354	0.0
2.75	5.60	0.372	0.372	0.0



後述する如く、第3.1表乃至第3.3表或は第3.1図乃至第3.3図を使用することに依り容易に附加質量音片の節点位置を設計することが出来る。但し、同図表に示した節点は基本振動の二節点の中の一つで、他は全く対称の位置にある。

§ 4. 附加質量音片の設計^{(4) (5)}

附加質量音片の共振周波数については§ 2 に於て、又その節点位置については§ 3 に於て夫々理論的な解析を行い設計式、並に設計図表を示し、更にこれらの理論値が実験誤差の範囲内で全く実験値と一致することを示したが、本章では更にこれら附加質量音片の設計法について少しく説明する。

4.1. 両端附加質量音片（及び中央附加質量音片）の設計法

両端附加質量音片（中央附加質量音片）では附加質量の増加と共にその共振周波数は低下するが、附加質量の増加と共にその節点位置は素地音片の節点位置より、夫々端部（中央部）に向つて移動する。

次にその設計法を示す。

(i) 所望の附加質量音片の固有角周波数 ω_1 に対して適当な素地音片の固有角周波数

ω_{01} を選定する。

(ii) ω_1/ω_{01} が与えられると (2.11) 式或は、第2.1表及び第2.4図 ((2.12) 式或は第2.2表及び第2.6図) から q (p) が与えられる。

(iii) 次に第3.2表或は第3.2図 (第3.3表或は第3.3図) から (ii) で得られた q (p) を用いて節点位置 X_i を決定する。

所求の節点は素地音片の両端より $X_i (=x/l_0)$ なる二点である。

(iv) 附加質量の大きさ M_1, M_2, M_3 は素地音片の全質量を M_0 とすれば

$$q = M_2/M_0 = M_1/M_0, \quad (p = M_3/M_0) \text{ なる関係から決定される。}$$

上述の如く与へられた節点位置を支持し、所要の質量を附加すれば求むる固有周波数をも有する両端附加質量音片 (中央附加質量音片) が設計出来る。

4.2. 三点附加質量の設計

$p/q = a$ なる値を適当に選定する事により任意点に節点を持ち来らすことが出来るが、

$p/q = 3.34$ なる特別の場合 (4.3参照) についてのみ説明する。

4.3. 三点平衡附加質量音片の設計

$p/q = a = 3.34$ なる三点平衡附加質量音片ではその節点が常に素地音片の両端より $0.224 \times l_0$ の点即ち均一棒の自由振動の第一次共振の節点に合致し、 p/q の値から3.34で一定であれば p 及び q の大きさの如何に拘らずその節点位置が移動しない。

即ち、節点位置を常に一定に保つて、共振周波数だけを適当に加減することが出来る。

次にその設計例を示す

(i) 所望の附加質量音片の第一次共振角周波数 ω_1 に対し、適当な素地音片の基本振動の固有角周波数 ω_{01} を選定する。

(ii) ω_{01}/ω_1 が与えられると (2.13) 式或は第2.4表及び第2.8図から p 及び q が決定される。

(iii) 次に素地音片の全質量を M_0 とすれば、

$$p = \frac{M_3}{M_0}, \quad q = \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_2}{M_0}, \quad (p/q = 3.34)$$

から附加すべき質量 M_1, M_2, M_3 が与えられる。

(iv) 支持すべき点は素地音片の節点である両端より $0.224l_0$ の点である。

4.4. 三点平衡附加質量音片の特徴

次に三点平衡附加質量音片の特徴を列挙する。

(i) 共振尖鋭度と、共振角周波数との比、即ち Q/ω の値は附加質量の増加と共に増加する。

(ii) 節点位置は共振周波数値、即ち附加質量の大きさに関係なく、常に素地音片の節点位置と同じである。

(iii) 固有周波数値は、素地音片の固有周波数の値より任意に連続的に低減せしむる事が出来る。

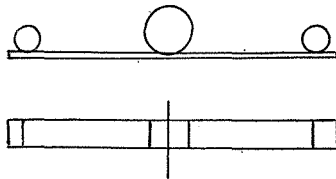
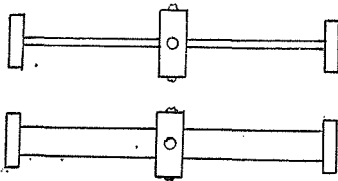
(iv) 特に低い周波数の標準振動子として、優れて居る。

(v) その工作も比較的簡単である。

4.5. 附加すべき質量の形状と取付について

附加質量の取付方法，形状，材質等については現在，猶研究中であるが，第4.1図にその一・二の例を示す。

や4.1図



本実験に於ては，便宜上同図に示す如くに円鑄を図示する如く配置しボルトで止めたのを採用した。

附加した質量の慣性，その他の影響並びに附加質量の最適の取付方法，形状等については附加質量音片の最適寸法比と共に次の機会に報告する予定である。

§ 5. 三点平衡附加質量音片の共振尖鋭度

既に知られている様に，機械振動子の Q はその振動中の大きさに依り異なるもので又，(5.1) 式に示す如く振動子の固有周波数 f_0 に比例する。従つて振動子の Q を論ずる場合には測定時の振動振巾を明瞭ならしめる必要があり，附加質量音片相互間の共振

尖鋭度を比較するには Q/ω (=等価質量 m /等価機械低抗 r) なる量で比較する方が妥当であると考へられる。 Q の測定には第5.1図に示す如き装置を用いた。即ちブラウン管上の図形は第5.2図 A に示す様に水平掃引電圧を与へず，単一線の垂直線として，振動振巾を表示せしめ，同図形上に，振巾 Y_1 の位置及びその $1/m$ の振巾 Y_2 の位置に Y_1 , Y_2 の二目盛を附しておく，別に設けた発振器に依り振動子を共振させておけばブラウン管上に垂直振巾が画かれる。

次にスイッチ S を開くと，第5.2図 B に示す様に振動子は減衰自由振動を行い乍ら，次第に減衰し，それに伴つてブラウン管上の垂直振巾も次第に減少してゆく。

垂直振巾 Y_1 点を，通過する時から Y_2 点を通過するとき迄の時間 t を測定すれば共振尖鋭度 Q は次式より求められる。

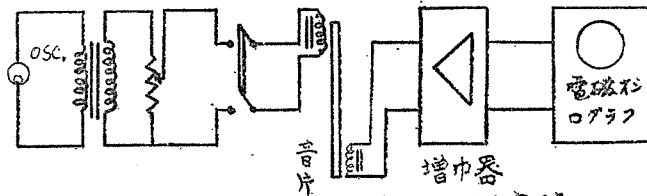
$$\delta = \frac{1}{ft} \log_e \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{2.3}{ft} \log_{10} m, \quad Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{f \cdot t \cdot \pi}{2.3 \cdot \log_{10} m} \quad (5.1)$$

$$Q/\omega = \frac{t}{4.6 \log_{10} m} \quad (5.2)$$

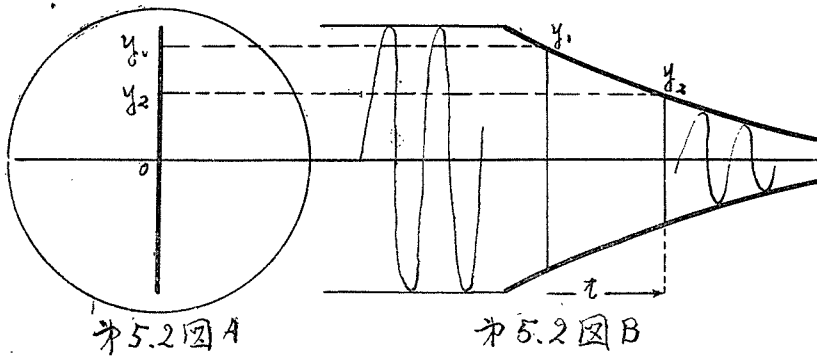
但し， f は機械振動子の固有周波数で，上式の δ 及び Q は振巾 $(Y_1 + Y_2)/2$ に於ける δ 及び Q の値に相当する。

第5.1表，第5.2表及び第5.3図乃至第5.5図に素地音片並びに三点平衡附加質量音片の自由端振動振巾に対する Q/ω の値を示す。

即ち第5.3図は素地音片並びに三点平衡附加質量音片の Q 或は Q/ω の測定値を示し，第5.4図は後者の音片の附加質量比 p, q に対する Q/ω を，又第5.5図は同じく附加質量比に対する Q の測定値を示す。同図表により次の結論を得る。

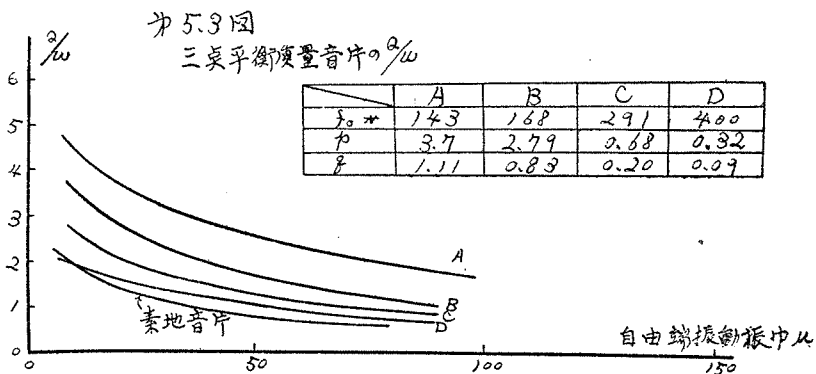


第5.1図 共振尖鋭度 Q の測定法



第 5. 1 表 素地音片の Q 及び Q/ω_{01} 測定空隙 1.315mm

自由端振巾 μ	$2\pi f_{01}$ Hz	Q	Q/ω_{01}
5	3 5 7 0	7 2 0 0	2. 1
7	3 5 7 0	6 5 0 0	1. 8
1 4	3 5 7 0	6 0 0 0	1. 7
2 1	3 5 7 0	4 3 5 0	1. 3
3 3	3 5 7 0	3 4 0 0	0. 9
6 3	3 5 7 0	2 5 5 0	0. 7
7 8	3 5 7 0	2 2 0 0	0. 6



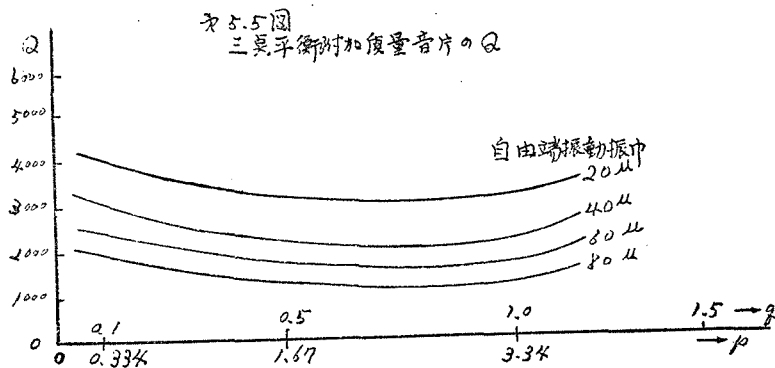
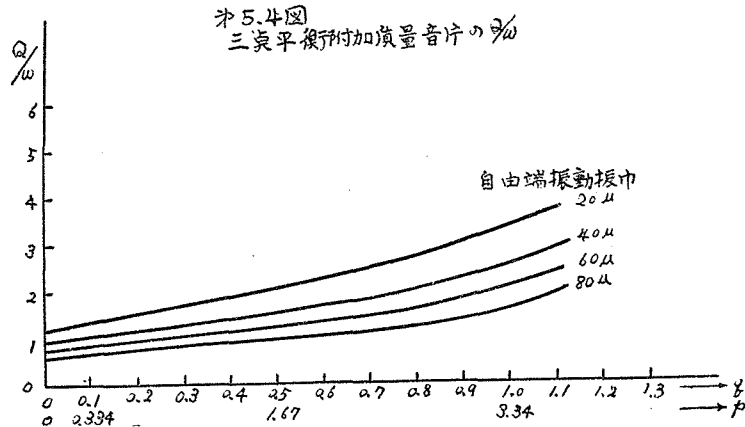
第 5. 2 表 三点平衡附加質量音片の Q 及び Q/ω_1 測定空隙 1.315mm

中央質量比 p	両端質量比 q	共振周波数 f_1	振動振巾	Q	Q/ω_1
0.327	0.098	400	7.0	4880	1.9
			10.4	4570	1.8
			12.4	4500	1.76
			18.0	4000	1.58
			36.0	3100	1.22
			54.0	2340	0.92
			88.0	1800	0.71
			162.0	1200	0.475
0.680	0.204	291	7.0	—	—
			10.6	4600	2.5
			12.5	4380	2.38
			18.4	3750	2.04
			37.0	2810	1.53
			55.0	2050	1.12
			89.0	1710	0.93
2.79	0.834	168	25.0	2650	2.5
			45.0	1850	1.75
			90.0	1160	1.10
			135.0	690	0.65
0.70	1.114	143	11.0	3800	4.25
			30.0	2800	3.15
			60.0	2100	2.35
			91.0	1700	1.90
			148.0	1340	1.50

$Q/\omega \left(= \frac{m}{r} \right)$ の値は附加質量の増大と共に大となり、特に振巾の小さい場合にこの傾向が大である。又 Q の値は附加質量の増大するに従ひ一旦降るが再び上昇している。

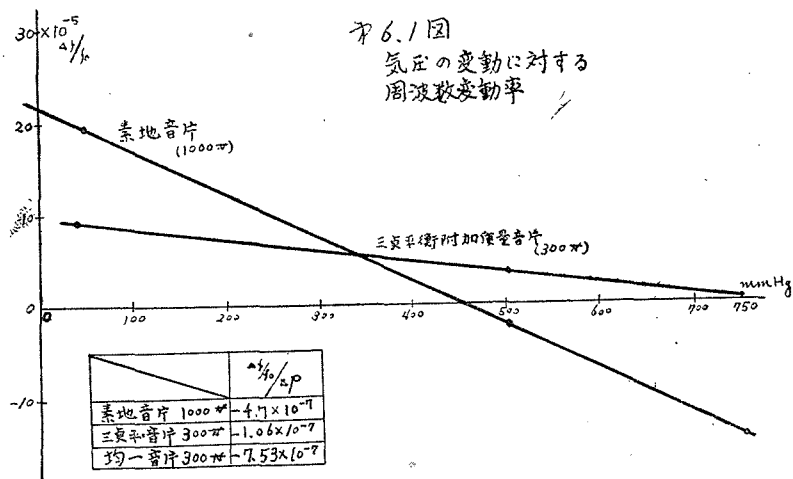
即ち Q の大なる附加質量音片を設計するには附加すべき質量を大ならしめた方がよい

と言える。然し乍ら之は支持の点から制限を受ける。附加質量音片の最適寸法比については現在研究中であるが、一応今迄に得られた結果について述べた。



§ 6 三点平衡附加質量音片の共振周波数に対する周囲媒質の氣圧の影響

第6.1表に示す如き三点平衡附加質量音片と素地音片並に前者の附加質量音片と同一固有周波数を有する自由—自由棒の均一音片について、共振周波数に対する周囲媒質の氣圧



の影響を実験的に求めて見た。

その結果を第6.1図に示す、即ち 1mmHg に対する周波数変動率 $\Delta f/f_0$ は素地音片では、 $4.7 \times 10^{-7}/\text{mmHg}$ であり三点平衡附加質量音片では $1.06 \times 10^{-7}/\text{mmHg}$ である。

第 6.1 表

素地音片の共振周波数 f_1	素地音片質量 M_0 (gr)	三点附加平衡質量音片の共振周波数 $f_1(o/s)$	中央附加質量比 p	両端附加質量比 q
1000	28.7	300	2.17	0.65
300	36.1	—	—	—

§ 7 結 言

以上、附加質量音片の共振周波数及び節点の位置等につき説明し、此等理論値がよく実験値と一致することを認め、附加質量音片の設計図表を § 2 乃至 § 3 に示した。

本文に於ては、附加質量音片として、両端附加質量音片、中央附加質量音片、及び中央両端附加質量音片について考察を行い、全長の短縮及び周波数の低減を自的とする時は後者の三点附加質量音片が適しており、特に中央及び両端に附加すべき質量比を、3.34 ならしめた三平衡点附加質量音片に於ては、その節点位置が、素地音片の節点の位置と同じく両端より全長の 0.224 倍の点に生じ、種々なる利点のあることを示した。

附加質量音片は未だ研究途上のものであり、不十分な点も多々あるが、附加質量音片の設計につき報告した。

本研究は、東北大学永井研究室に於て、同教授の下に、行つたものである。終始、御懇得なる御指導を賜つた永井教授に深謝の意を表し、併せて本研究に御援助を賜つた、東北大学石井助教授、守屋忠雄氏、太田悦子嬢に心からの感謝の意を表する。又先輩木村瑞雄氏にも深謝の意を表します。

TUNING BAR "ONPEN" WITH ADDITIONAL MASSES FOR A LOW FREQUENCY STANDARD.

Masashi KONNO ; Keisaku INOMATA

Electrical Engineering department, Faculty of Engineering, Yamagata University

The TUNING BAR has better characteristic than TUNING FORK. Therefore it is utilized extensively instead of TUNING FORK as the source of audio frequency standard in the field of electrical communication of Japan. (See, The Synchronism and its application in electrical communication : SCIENTIFIC RESEARCH COUNCIL OF JAPAN. Maruzen Co. 1951)

In this paper, we mention the design methods of the TUNING BAR loaded with additional masses, which is to be used as a source of low audio frequency standard, and discuss about the results of experiments.